Bohmのシース条件の数学解析 (長距離力に支配された多体系自己組織化の統一的理解を目指して)

AUTHOR(S):

鈴木, 政尋

CITATION:

鈴木, 政尋. Bohmのシース条件の数学解析 (長距離力に支配された多体系自己組織化の統一的理解を目指して). 数理解析研究所講究録 2014, 1885: 116-122

ISSUE DATE:

2014-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/195702

数理解析研究所講究録
第 1885 巻 2014 年 116-122

Bohm のシース条件の数学解析

鈴木政尋*

MASAHIRO SUZUKI

東京工業大学 大学院情報理工学研究科

GRADUATE SCHOOL OF INFORMATION SCIENCE AND ENGINEERING,

TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY

1 序

プラズマが接触する物体の周囲にはシースと呼ばれる境界層が形成される．プラズマ物理学では，シースが形成されるための条件として Bohm 条件が提案されており，この条件はプラズマ中の正イオンが極超音速でシース領域に流れ込むことを意味する．本稿では，Bohm 条件の数学的な正当性を検証した研究成果 [8, 10] について概説する．

プラズマ中の正イオンの運動は次の Euler-Poisson 方程式で記述される．

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \tag{1.1a}$$

$$(\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + K\nabla\rho = \rho\nabla\phi, \tag{1.1b}$$

$$\Delta\phi = \rho - e^{-\phi}. \tag{1.1c}$$

未知変数 ρ, u, $-\phi$ はそれぞれ正イオン密度，正イオン速度，電位を表す．また，K は正イオン温度に対応し，正定数とする．方程式 (1.1c) は電磁気学における Poisson 方程式であるが，電子密度 ρ_e は Boltzmann の関係式

$$\rho_e = e^{-\phi}$$

に従うとしている．

$N = 1, 2, 3$ とし，N 次元半空間 $\mathbb{R}^N_+ := \{x \in \mathbb{R}^N; x_1 > 0\}$ 上で方程式系 (1.1) の初期値境界値問題を考察する．空間変数 $x \in \mathbb{R}^N_+$ は法線成分 x_1 と接線成分 x' に分けて表す．

$$x = (x_1, \ldots, x_N) = (x_1, x'), \quad x' = (x_2, \ldots, x_N).$$

*e-mail: masahiro@is.titech.ac.jp

次の初期条件と境界条件を課す.

$$(\rho, u)(0, x) = (\rho_0, u_0)(x),$$
$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N_+} \rho_0(x) > 0, \quad \lim_{x_1 \to \infty} (\rho_0, u_0)(x_1, x') = (\rho_+, u_+, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{N+1}, \tag{1.2}$$
$$\phi(t, 0, x') = \phi_b. \tag{1.3}$$

ここで, ρ_+, u_+, ϕ_b は与えられた定数である. 電位の基準点は無限遠方に設定する. すなわち,

$$\lim_{x_1 \to \infty} \phi(t, x_1, x') = 0.$$

このとき, Poisson 方程式 (1.1c) が古典的な意味で可解となるには, 準中性条件が必要となる.

$$\rho_+ = 1. \tag{1.4}$$

平面定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}_1, 0, \dots, 0, \tilde{\phi}) \in \mathbb{R}^{N+2}$ とは, 時間変数 t と空間変数の接線成分 x' に依存しない方程式系 (1.1) の解であると定める. よって, 平面定常解は方程式系

$$(\tilde{\rho}\tilde{u}_1)_{x_1} = 0, \tag{1.5a}$$
$$\left(\tilde{\rho}\tilde{u}_1{}^2 + K\tilde{\rho}\right)_{x_1} = \tilde{\rho}\tilde{\phi}_{x_1}, \tag{1.5b}$$
$$\tilde{\phi}_{x_1 x_1} = \tilde{\rho} - e^{-\tilde{\phi}} \tag{1.5c}$$

および, 時間発展問題と同じ条件

$$\inf_{x_1 \in \mathbb{R}_+} \tilde{\rho}(x_1) > 0, \quad \lim_{x_1 \to \infty} (\tilde{\rho}, \tilde{u}_1, \tilde{\phi})(x_1) = (1, u_+, 0), \quad \tilde{\phi}(0) = \phi_b \tag{1.6}$$

をみたす.

プラズマが接触する固定壁付近には境界層 (シース) が形成される. 具体的には, プラズマが壁に接触するとき, プラズマ中の電子と正イオンは壁に流れ込むが, 正イオンと比べて電子の質量は遥かに小さく移動しやすいために, 電子が過剰に壁に到達して電位が負となる. 負の電位は電子を反射し, 正イオンを加速させて, 電子とイオンの粒子束が等しくなるようにプラズマと壁の間に電界を形成させる. このプラズマと壁の間の領域がシースと呼ばれている. (詳細は [4, 7] を参照.)

1920 年代頃からシースの研究は開始され, Langmuir により, シースが形成されるためには, ある一定の速度以上で正イオンはシース領域に流れ込まなければならないことが指摘された [6]. その後, Bohm は定常 Euler-Poisson 方程式を考察し, 正イオン速度は $\sqrt{\kappa(T_e + T_i)/m_i}$ に達する必要があることを明らかにした [3]. ここで, κ は Boltzmann 定数, T_e は電子温度, T_i は正イオン温度, m_i は正イオン質量を表す. こんにちでは, この条件は Bohm 条件と呼ばれている. シース形成および Bohm 条件に関する一連の物理的な研究成果は, サーベー論文 [9] で概説されている.

方程式系 (1.1) は適切な無次元化が行われており, この系では Bohm 条件は,

$$u_+^2 > K + 1, \quad u_+ < 0 \tag{1.7}$$

となる．方程式系 (1.1) を用いて，シース形成および Bohm 条件を議論した数学的な成果は幾つか報告されている．Ha-Slemord は (1.1) の自由境界問題を扱っている [5]．彼らは自由境界上で Bohm 条件 (1.7) が成立すると仮定し，時間大域解の存在を議論しているが，その解の漸近挙動は解析していない．シースは定常的な境界層と観測されるため，数学的には定常解に対応し，時間大域的に安定であると予想できる．実際，Ambroso-Méhats-Raviart は，Bohm 条件を仮定して区間 $(0,1)$ 上で単調な定常解の存在を示し [2]，Ambroso は時間発展問題の解は時間経過とともに [2] で構成された定常解に収束することを数値的に確認している [1]．さらに，Suzuki は一次元半空間 $\mathbb{R}_+$ 上で定常問題 (1.5), (1.6) に解が存在するための必要十分条件を導き，Bohm 条件 (1.7) よりやや強い条件を仮定して定常解の安定性を証明している [10]．その後，Nishibata-Ohnawa-Suzuki の研究 [8] において [10] の安定性定理が改善され，Bohm 条件下で定常解の安定性が示されている．以上の研究により，Bohm 条件は定常解が一意的に存在して時間的に安定であるための十分条件であることが解明されている．また，研究 [8] で行われているスペクトル解析より，Bohm 条件は安定性のための必要条件であると推測される．

本稿では，とくに研究 [8,10] について概説する．具体的には，第二章では [10] の定常解の存在定理を，第三章では [8] のスペクトル解析および安定性定理をそれぞれ紹介する．本章を締めくくる前に，数学記号を導入する．

記号． 非負の整数 $i \geq 0$ に対して，$H^i(\Omega)$ は Sobolev 空間であり，そのノルムを $\|\cdot\|_i$ と書く．非負の整数 $k,\ i \geq 0$ に対して，$C^k([0,T]; H^i(\Omega))$ は $H^i(\Omega)$ に値を取り $[0,T]$ 上において k 階連続微分可能な関数の空間を表す．また，関数空間 $\mathfrak{X}$ を次のように定義する．

$$\mathfrak{X}_i^j([0,T]) := \bigcap_{k=0}^{i} C^k([0,T]; H^{j+i-k}(\Omega)), \quad i,j = 0,1,\ldots,$$
$$\mathfrak{X}_i([0,T]) := \mathfrak{X}_i^0([0,T]).$$

2 平面定常解の一意的存在

平面定常解の存在を議論する上で，次の Sagdeev ポテンシャル V が重要な役割をはたす．(このポテンシャルの物理的な紹介は [4,7] を参照.)

$$V(\phi) := \int_0^\phi f^{-1}(\eta) - e^{-\eta}\, d\eta, \quad f(\rho) := K \log \rho + \frac{u_+^2}{2\rho^2} - \frac{u_+^2}{2}.$$

ここで，f の逆関数 f^{-1} の定義について述べる．$u_+ = 0$ の場合，f は $\mathbb{R}$ 上で狭義単調増加であり，逆関数は $f^{-1}(\phi) := e^{\phi/K}$ となる．一方，$u_+ \neq 0$ の場合，f は区間 $I_1 := (0, |u_+|/\sqrt{K}]$ 上で狭義単調減少であり，区間 $I_2 := [\,|u_+|/\sqrt{K}, \infty)$ 上で狭義単調増加である．よって，f の定義域を I_1 または I_2 に制限して逆関数 f^{-1} を定めるが，$\lim_{x\to\infty} \tilde{\rho}(x) = 1$ より，1 を含む区間を選ぶ必要がある．すなわち，$u_+^2 \leq K$ ならば定義域を I_2 に制限し，$u_+^2 > K$ ならば定義域を I_1 に制限する．($u_+^2 = K$ の場合に I_1 に制限してはならない理由は [10] で議論

されている.）以上で，逆関数 f^{-1} が定義された．平面定常解の一意的存在に関する結果を紹介する．

定理 2.1. **([10])** (i) 無限遠方の流速 u_+ は，$u_+^2 \le K$ または $K+1 \le u_+^2$ のいずれかをみたすとする．このとき，定常問題 (1.5), (1.6) に

$$\tilde{\rho}, \tilde{u}_1, \tilde{\phi} \in C(\overline{\mathbb{R}_+}) \quad かつ \quad \tilde{\rho}, \tilde{u}_1, \tilde{\phi}, \tilde{\phi}_x \in C^1(\mathbb{R}_+) \tag{2.1}$$

をみたす単調な平面定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}_1, \tilde{\phi})$ が一意的に存在するための必要十分条件は，$V(\phi_b) \ge 0$ かつ $\phi_b \ge f(|u_+|/\sqrt{K})$ で与えられる．さらに，$K+1 < u_+^2$ かつ $\phi_b > f(|u_+|/\sqrt{K})$ ならば $(\tilde{\rho}, \tilde{u}_1, \tilde{\phi}) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$ であり，次が成り立つ．

$$|\partial_x^j(\tilde{\rho}-1)| + |\partial_x^j(\tilde{u}_1 - u_+)| + |\partial_x^j\tilde{\phi}| \le C|\phi_b|e^{-cx}, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{2.2}$$

ここで，c および C は正定数である．

(ii) 無限遠方の流速 u_+ は，$K < u_+^2 < K+1$ をみたすとする．このとき，$\phi_b \ne 0$ ならば，(2.1) をみたす平面定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}_1, \tilde{\phi})$ は存在しない．一方，$\phi_b = 0$ ならば，(2.1) をみたす平面定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}_1, \tilde{\phi})$ は定数解 $(1, u_+, 0)$ に限られる．

3 平面定常解の安定性

平面定常解の安定性を議論するために，新たに未知変数

$$v := \log \rho, \quad \tilde{v} := \log \tilde{\rho}$$

を導入し，さらに平面定常解からの摂動 (ψ, η, σ) を定義する．

$$\begin{aligned} (\psi, \eta, \sigma)(t, x_1, x') &:= (v, u, \phi)(t, x_1, x') - (\tilde{v}, \tilde{u}, \tilde{\phi})(x_1), \\ \tilde{u}(x_1) &:= (\tilde{u}_1, 0, \ldots, 0)(x_1). \end{aligned}$$

方程式系 (1.1) および (1.5) から，摂動 (ψ, η, σ) は次の方程式をみたす．

$$\psi_t + u \cdot \nabla\psi + \operatorname{div}\eta + \eta \cdot \nabla\tilde{v} = 0, \tag{3.1a}$$

$$\eta_t + (u \cdot \nabla)\,\eta + K\nabla\psi - \nabla\sigma + (\eta \cdot \nabla)\,\tilde{u} = 0, \tag{3.1b}$$

$$\Delta\sigma = e^{\psi + \tilde{v}} - e^{\tilde{v}} - e^{-(\sigma + \tilde{\phi})} + e^{-\tilde{\phi}}. \tag{3.1c}$$

また，(1.2), (1.3), (1.6) より，方程式系 (3.1) の初期値と境界値は次の通りとなる．

$$(\psi, \eta)(0, x) = (\psi_0, \eta_0)(x) := (\log\rho_0 - \log\tilde{\rho}, u_0 - \tilde{u}), \tag{3.2}$$

$$\sigma(t, 0, x') = 0. \tag{3.3}$$

Bohm 条件 (1.7) と不等式 (2.2) より，摂動 (ψ, η, σ) および境界値 $|\phi_b|$ が十分小さいならば，法線方向 x_1 に対する双曲型方程式系 (3.1a), (3.1b) の特性曲線の速度 λ_i はすべて負となる．

$$\lambda_1 := \eta_1 + \tilde{u}_1 - \sqrt{K} < 0, \quad \lambda_2 := \eta_1 + \tilde{u}_1 + \sqrt{K} < 0,$$
$$\lambda_i = \eta_1 + \tilde{u}_1 < 0, \quad i = 3, \ldots, N+1.$$

したがって，双曲型方程式系 (3.1a), (3.1b) に対して境界条件を設ける必要はなく，方程式系 (3.1) の初期値境界値問題は境界条件 (3.3) のみで一意的に時間局所可解となる．

方程式系 (3.1) を無限遠方の値 $(\rho, u, \phi) = (1, u_+, 0, \ldots, 0, 0) \in \mathbb{R}^{N+2}$ で線形化する．

$$\psi_t + u_+ \psi_{x_1} + \operatorname{div} \eta = 0, \tag{3.4a}$$
$$\eta_t + u_+ \eta_{x_1} + K \nabla \psi - \nabla \sigma = 0, \tag{3.4b}$$
$$\Delta \sigma = \psi + \sigma. \tag{3.4c}$$

この方程式系に Fourier 変換と Laplace 変換を行えば，固有値問題

$$\mu(i\xi)\hat{\psi} + i\xi_1 u_+ \hat{\psi} + i\xi \cdot \hat{\eta} = 0,$$
$$\mu(i\xi)\hat{\eta} + i\xi_1 u_+ \hat{\eta} + iK\hat{\psi}\xi + \frac{i\hat{\psi}}{|\xi|^2 + 1}\xi = 0, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$$

が得られ，そのスペクトル $\mu(i\xi)$ は次の通りとなる．

$$\mu(i\xi) = i\left(-\xi_1 u_+ \pm |\xi|\sqrt{K + \frac{1}{1+|\xi|^2}}\right), \quad -i\xi_1 u_+.$$

ここで，$-i\xi_1 u_+$ の重複度は $N-1$ である．スペクトルの実部はすべて零になっており，一般には安定性解析は困難となる．この困難を解消するために，重み付きの Sobolev 空間を使用する．次の二通りの重み関数を取り扱う．

$$(1 + \beta x_1)^\lambda \quad \text{または} \quad e^{\beta x_1}.$$

重み付きの Sobolev 空間が平面定常解の安定性解析において有用であることは，次のスペクトル解析から分かる．線形化方程式系 (3.4) を新たな未知変数 $(\Psi, H, \Sigma) := (e^{\beta x_1/2}\psi, e^{\beta x_1/2}\eta, e^{\beta x_1/2}\sigma)$ について書き換える．

$$\Psi_t + u_+ \Psi_{x_1} + \operatorname{div} H = \frac{\beta}{2} u_+ \Psi + \frac{\beta}{2} H_1, \tag{3.5a}$$
$$H_t + u_+ H_{x_1} + K \nabla \Psi - \nabla \Sigma = \frac{\beta}{2} u_+ H + \frac{\beta}{2} K \Psi \nabla x_1 - \frac{\beta}{2} \Sigma \nabla x_1, \tag{3.5b}$$
$$\Delta \Sigma - \beta \Sigma_{x_1} + \left(\frac{\beta^2}{4} - 1\right) \Sigma = \Psi. \tag{3.5c}$$

この方程式系に Fourier 変換と Laplace 変換を行い，スペクトル $\mu_j(i\xi)$ を求める．

$$
\begin{aligned}
\mu_1(i\xi) &= \frac{\beta u_+}{2} + i\left(-\xi_1 u_+ - \sqrt{K\zeta - \frac{1}{\zeta} + 1 - K}\right), \\
\mu_2(i\xi) &= \frac{\beta u_+}{2} + i\left(-\xi_1 u_+ + \sqrt{K\zeta - \frac{1}{\zeta} + 1 - K}\right), \\
\mu_j(i\xi) &= \frac{\beta u_+}{2} - i\xi_1 u_+, \quad j = 3, \ldots, N+1, \\
\zeta &:= 1 + |\xi|^2 - \frac{\beta^2}{4} + i\beta\xi_1, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N.
\end{aligned}
$$

ここで，次の命題が成り立つ．

命題 3.1. ([8]) 方程式系 (3.5) のスペクトル $\mu_j(i\xi)$ に対して

$$
\max_{j=1,\ldots,N+1}\left\{\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} Re\left(\mu_j(i\xi)\right)\right\} = Re\left(\mu_1(0)\right) = \frac{\beta}{2}\left(u_+ + \sqrt{K + \frac{1}{1-\beta^2/4}}\right)
$$

が成立する．したがって，*Bohm* 条件 (1.7) のもとでは，β が十分に小さければスペクトル $\mu_j(i\xi)$ の実部がすべて負となり，方程式系 (3.5) の解は安定となる．

この命題から予想されるように, Bohm 条件下では単調な平面定常解の漸近安定性が示される．

定理 3.2. ([8]) $N = 1, 2, 3$ とし，$m = [N/2] + 2$ とおく．*Bohm* 条件 (1.7) を仮定する．

(i) ある正定数 α に対して，初期値は $(e^{\alpha x_1/2}\psi_0, e^{\alpha x_1/2}\eta_0) \in H^m(\mathbb{R}^N_+)$ をみたすとする．このとき，ある正定数 $\beta(\le \alpha)$ と δ が存在して，$|\phi_b| + \|(e^{\beta x_1/2}\psi_0, e^{\beta x_1/2}\eta_0)\|_m \le \delta$ ならば，初期値境界値問題 (3.1)–(3.3) の時間大域解 (ψ, η, σ) が関数空間

$$
(e^{\beta x_1/2}\psi, e^{\beta x_1/2}\eta) \in \mathfrak{X}_m([0,\infty)), \quad e^{\beta x_1/2}\sigma \in \mathfrak{X}^2_m([0,\infty))
$$

で一意的に存在する．さらに，(ψ, η, σ) は減衰評価

$$
\sup_{x\in\mathbb{R}^N_+} |(\psi, \eta, \sigma)(t)| \le Ce^{-\gamma t}
$$

をみたす．ここで，C および γ に時間変数 t に依らない正定数である．

(ii) $\lambda \ge 2$ とし，$\kappa \in (0, \lambda)$ とする．ある正定数 α に対して，初期値は $((1+\alpha x_1)^{\lambda/2}\psi_0, (1+\alpha x_1)^{\lambda/2}\eta_0) \in H^m(\mathbb{R}^N_+)$ をみたすとする．このとき，ある正定数 $\beta(\le \alpha)$ と δ が存在して，$|\phi_b| + \|((1+\beta x_1)^{\lambda/2}\psi_0, (1+\beta x_1)^{\lambda/2}\eta_0)\|_m \le \delta$ ならば，初期値境界値問題 (3.1)–(3.3) の時間大域解 (ψ, η, σ) が関数空間

$$
((1+\beta x_1)^{\lambda/2}\psi, (1+\beta x_1)^{\lambda/2}\eta) \in \mathfrak{X}_m([0,\infty)), \quad (1+\beta x_1)^{\lambda/2}\sigma \in \mathfrak{X}^2_m([0,\infty))
$$

で一意的に存在する．さらに，(ψ, η, σ) は減衰評価

$$
\sup_{x\in\mathbb{R}^N_+} |(\psi, \eta, \sigma)(t)| \le C(1+\beta t)^{-\lambda+\kappa}
$$

をみたす．ここで，C は時間変数 t に依らない正定数である．

参 考 文 献

[1] A. AMBROSO, *Stability for solutions of a stationary Euler-Poisson problem*, Math. Models Methods Appl. Sci., 16 (2006), pp. 1817–1837.

[2] A. AMBROSO, F. MÉHATS AND P.-A. RAVIART, *On singular perturbation problems for the nonlinear Poisson equation*, Asympt. Anal., 25 (2001), pp. 39–91.

[3] D. BOHM, *Minimum ionic kinetic energy for a stable sheath*, in The characteristics of electrical discharges in magnetic fields, A. Guthrie and R.K.Wakerling eds., McGraw-Hill, New York, 1949, pp. 77–86.

[4] F. F. CHEN, *An Introduction to Plasma Physics*, Second ed., Plenum Press, 1984.

[5] S.-H. HA AND M. SLEMROD, *Global existence of plasma ion-sheaths and their dynamics*, Comm. Math. Phys., 238 (2003), pp. 149–186.

[6] I. LANGMUIR, *The interaction of electron and positive ion space charges in cathode sheaths*, Phys. Rev., 33 (1929), pp. 954–989.

[7] M. A. LIEBERMAN AND A. J. LICHTENBERG, *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing*, Second ed., Wiley-Interscience, 2005.

[8] S. NISHIBATA, M. OHNAWA AND M. SUZUKI, *Asymptotic stability of boundary layers to the Euler-Poisson equations arising in plasma physics*, SIAM J. Math. Anal., 44 (2012), pp. 761–790.

[9] K.-U. RIEMANN, *The Bohm criterion and sheath formation*, J. Phys. D: Appl. Phys., 24 (1991), pp. 493–518.

[10] M. SUZUKI, *Asymptotic stability of stationary solutions to the Euler-Poisson equations arising in plasma physics*, Kinetic and Related Models, 4 (2011), pp. 569-588.